Статистика

План лекции

П. 1. Базовые понятия математической статистики и анализа данных

Без адекватных технологий анализа информации (данных) человек оказывается беспомощным в жестокой информационной среде. Статистика позволяет компактно описать данные, понять их структуру, провести классификацию, увидеть закономерности в хаосе случайных явлений.

Приведем несколько примеров применения методов анализа данных в практических задачах.

Пример 1. Рассмотрим довольно часто встречающуюся задачу. Предположим, что Вы изобрели важное нововведение: изменили систему оплаты труда, перешли на выпуск новой продукции, использовали новую технологию, методику. Вам кажется, что это дало положительный эффект, но действительно ли это так? А может быть этот кажущийся эффект определен вовсе не вашим нововведением, а естественной случайностью, и уже завтра Вы можете получить прямо противоположный, но столь же случайный эффект? Для решения этой задачи надо сформировать два набора чисел, каждый из которых содержит значения интересующего вас показателя эффективности до и после нововведения. Статистические критерии сравнения двух выборок покажут Вам, случайны или неслучайны различия этих двух рядов чисел.

Пример 2. Другая важная задача состоит в прогнозировании будущего поведения некоторого временного ряда: изменения курса доллара, цен и спроса на продукцию или сырье. Для такого временного ряда с помощью статистических методов подбирают некоторое аналитическое уравнение – строят регрессионную модель. Если мы предполагаем, что на интересующий нас показатель влияют некоторые другие факторы, их тоже можно включить в модель, предварительно проверив значимость этого влияния. Затем на основе построенной модели можно сделать прогноз и указать его точность.

Все приведенные примеры имеют одну общую черту: непредсказуемость результатов для действий, которые проводятся в неизменных условиях. Еще одной особенностью приведенных примеров является сравнительно малый объем исходных данных (объем выборки). Причина этого состоит в том, что для большинства прикладных исследований, особенно в гуманитарных областях, характерны именно небольшие объемы данных (исключение здесь составляет лишь демография и отдельные области медицинской статистики).

А.Н. Колмогоров и Ю.В. Прохоров дали следующее определение: ***Математическая статистика*** *– раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.*

Математическая статистика исходит из предположения, что наблюдаемая изменчивость окружающего мира имеет ***два источника****:*

- *действие известных причин и факторов;*
- *действие случайных причин и факторов.* Большинство природных и общественных явлений обнаруживают изменчивость, которая не может быть целиком объяснена закономерными причинами.

Статистический подход *– это выявление закономерной изменчивости на фоне случайных факторов и причин.* Методы математической статистики позволяют оценить параметры имеющихся закономерностей, проверить те или иные гипотезы об этих закономерностях.

Совокупность - *какое-либо множество испытуемых (учащихся), объединяемое по одному или нескольким интересующим признакам. Главное требование к выделению изучаемой совокупности — это ее качественная однородность.* Члены совокупности могут сравниваться между собой в отношении только того качества, которое становится предметом исследования. При этом обычно абстрагируются от других неинтересующих качеств. Так, если педагога интересует успеваемость учащихся, то он не принимает во внимание, как правило, их рост, вес и другие параметры, не относящиеся непосредственно к изучаемому вопросу.

Применение большинства статистических методов основано на идее использования небольшой случайной совокупности испытуемых из общего числа тех, на которых можно было бы распространить (генерализовать) выводы, полученные в результате изучения совокупности. Эта небольшая совокупность в статистике называется ***выборочной совокупностью*** *(или короче —* ***выборкой****). Главный принцип формирования выборки — это случайный отбор испытуемых из мыслимого множества учащихся, называемого* ***генеральной совокупностью*** *или* ***популяцией*** *объектов или явлений.*

Когда для каждого объекта в выборке измерено значение одной переменной, популяция и выборка называются ***одномерными****. Если же для каждого объекта регистрируются значения двух или нескольких переменных, такие данные называются* ***многомерными****.*

Обычно в статистике различают **<u>три типа значений переменных</u>: количественные, номинальные и ранговые**.

Значения ***количественных*** *переменных являются числовыми, могут быть упорядочены и для них имеют смысл различные вычисления*

Значения ***номинальных*** *переменных (например: пол, вид, цвет) являются нечисловыми, они означают принадлежность к некоторым классам и не могут быть упорядочены или непосредственно использованы в вычислениях.*

Ранговые *или порядковые переменные занимают промежуточное положение: их значения упорядочены (состояние больного, степень предпочтения), но не могут быть с уверенностью измерены и сопоставлены количественно.*

<u>Типы исходных данных:</u>

- **одна выборка.** Выборка может быть: неупорядоченная и структурированная (упорядоченная).
- **несколько выборок** - *совокупность измерений нескольких количественных, номинальных или ранговых переменных, произведенных в ходе эксперимента. Выборки могут быть:* ***независимые*** - *получены в эксперименте независимо друг от друга;* ***зависимые*** *– значения данных переменных каким-то образом согласованы (связаны) друг с другом в имеющихся наблюдениях.*

Типичные примеры зависимых переменных: рост человека связан с весом, потому что обычно высокие индивиды тяжелее низких; IQ (коэффициент интеллекта) связан с количеством ошибок в тесте.

- ***временной ряд или процесс*** *– представляет собой значение количественной переменной (отклика), измеренные через равные интервалы значений другой количественной переменной.*

Описательная статистика *– предназначена для представления данных в удобном виде и описания информации в терминах математической статистики и теории вероятностей.*

Основной величиной в статистических измерениях является единица статистической совокупности (например, любой из критериев оценки качества педагога-исследователя). Единица статистической совокупности характеризуется набором признаков или параметров. Значения каждого параметра или признака могут быть различными и в целом образовывать ряд случайных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Переменная *- это параметр измерения, который можно контролировать или которым можно манипулировать в исследовании.*

Относительное значение параметра *- это отношение числа объектов, имеющих этот показатель, к величине выборки.* Выражается относительным числом или в процентах (процентное значение).

Удельное значение данного признака - это *расчетная величина, показывающая количество объектов с данным показателем, которое содержалось бы в условной выборке, состоящей из 10, или 100, 1000 и т. д. объектов.*

Минимум и максимум — это минимальное и максимальное значения переменной (функции МИН и МАКС).

Среднее (оценка среднего, выборочное среднее) — сумма значений переменной, деленная на n (число значений переменной) – в Excel используется функция СРЗНАЧ.

Дисперсия выборки или выборочная дисперсия– это мера изменчивости переменной. Выборочная дисперсия вычисляется по формуле:

$$s2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N},$$

где $\bar{x}$ — выборочное среднее, N — число наблюдений в выборке (функция ДИСП).

Дисперсия меняется от нуля до бесконечности. Крайнее значение 0 означает отсутствие изменчивости, когда значения переменной постоянны.

Стандартное отклонение, среднее квадратическое отклонение вычисляется как корень квадратный из дисперсии (функция СТАНДОТКЛОН). Чем выше дисперсия или стандартное отклонение, тем сильнее разбросаны значения переменной относительно среднего.

Медиана *разбивает выборку на две равные части. Она дает общее представление о том, где сосредоточены значения переменной, иными словами, где находится ее центр. Для нахождения медианы измерения записывают в ряд по возрастанию значений. Если число измерений N нечетное, то медиана численно равна значению этого ряда, стоящему точно в середине, или на (N+1)/2 месте. Например, медиана пяти измерений: 10, 17, 21, 24, 25 – равна 21 – значению, стоящему на третьем месте (N+1)/2=(5+1)/2=3. Если число измерений четное, то медиана численно равна среднему арифметическому значений ряда, стоящих в середине, или на N/2 и N/2+1 местах. Например, медиана восьми измерений: 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 9 – равна 7,5 (7+8)/2=7,5 – среднему арифметическому значений ряда, стоящих на четвертом и пятом местах (N/2=8/2=4 и N/2+1=4+1=5) В Excel используется функция МЕДИАНА.*

Квартили представляют собой значения , которые делят две половины выборки (разбитые медианой) еще раз пополам

Различают верхнюю квартиль, которая больше медианы и делит пополам верхнюю часть выборки (значения переменной больше медианы), *и нижнюю квартиль*, которая меньше медианы и делит пополам нижнюю часть выборки. Нижнюю квартиль часто обозначают символом 25%. Верхнюю квартиль часто обозначают символом 75%.

¼ наблюдений лежит между минимальным значением и нижней квартилью, ¼ - между нижней квартилью и медианой, ¼ - между медианой и верхней квартилью, ¼ - между верхней квартилью и максимальным значением выборки.

Мода представляет собой максимально часто встречающееся значение переменой (функция МОДА). Например: для ряда 2, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 10 мода равна 9.

Если распределение имеет несколько мод, то говорят, что оно ***мультимодально*** или ***многомодально*** (имеет два или более «пика»).

Асимметрия – это свойство распределения выборки, которое характеризует несимметричность распределения случайной величины (функция СКОС). Вычисляется по формуле:

$$A_{ss} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^3 / n}{\sigma^3}$$

Асимметрия бывает положительной и отрицательной. Положительная сдвигается влево, а отрицательная – вправо.

Эксцесс – это мера крутости кривой распределения (функция ЭКСЦЕСС). Эксцесс равен:

$$E_x = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^4 / n}{\sigma_x^4} - 3$$

Для нахождения характеристик выборки в Excel используется процедура Описательная статистика.

П. 2. Вариационные ряды. Таблица частот. Полигон и гистограмма

Различные значения случайной величины, содержащейся в выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называются ***вариантами***.

Система вариант $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, расположенных в возрастающем порядке, называется ***вариационным рядом***.

Пусть задана дискретная случайная величина и ее вариационный ряд, полученный по выборке. Тогда число $\mu_i = \frac{k_i}{n} (i = 1, 2, \ldots, m)$, где k_i – количество повторений варианты α_i в выборке объема n, называется ***частотой*** этой варианты в данной выборке.

α_1	α_2	$\cdots$	α_m
μ_1	μ_2	$\cdots$	μ_m

В данной таблице в первой строке расположены варианты, во второй – соответствующие им частоты. Данная таблица называется ***таблицей частот***, или эмпирическим законом распределения дискретной случайной величины **x**. Сумма всех частот в таблице равна единице.

Если на плоскости в прямоугольной системе координат построить точки (α_i, μ_i) (i=1, 2, …, m) и соединить их последовательно отрезками прямых, то получим ломаную линию, которая называется ***полигоном частот***.

Полигон частот дает приближенное наглядное представление о характере распределения случайной величины **x**.

Если изучаемая случайная величина **x** непрерывна, то вместо обычного (дискретного) вариационного ряда составляют интервальный вариационный ряд: находят минимальную и максимальную варианты выборки и весь промежуток между ними разбивают на частичные промежутки. Получается т.н. интервальный вариационный ряд: $[c_1; c_2]$, $[c_2; c_3]$, …, $[c_m; c_{m+1}]$.

Далее по выборке определяют частоту $\tilde{\mu}_i = \frac{\tilde{k}_i}{n} (i = 1, 2, \ldots, m)$ попадания значения **x** в i-ый интервал. Здесь $\tilde{k}_i$ - количество членов выборки, попавших в i-ый интервал (для вычисления $\tilde{k}_i$ в Excel используется функция ЧАСТОТА). Если при этом некоторое x_k выборки совпадает с граничной точкой между промежутками, то его относят к правому промежутку. В результате получается интервальная таблица частот:

$[c_1; c_2]$	$[c_2; c_3]$	…	$[c_m; c_{m+1}]$
μ_1	μ_2	$\cdots$	μ_m

Интервальная таблица частот графически изображается ***гистограммой***, которая представляет собой ступенчатую линию. Основанием i-й ступеньки является i-й частичный интервал, а высота такова, что площадь ступеньки равна $\tilde{k}_i$. По построению суммарная площадь всех ступенек гистограммы равна 1. Для построения гистограммы по статистическим данным в Excel используется процедура Гистограмма.

Интервальным вариационным рядом, а также гистограммой пользуются и при изучении дискретных случайных величин, когда в дискретном вариационном ряде большое количество вариант, из-за чего он трудно обозрим.

П. 3. Методы психолого-педагогических исследований

Методами педагогического исследования называют совокупность приемов и операций, направленных на изучение педагогических явлений и решение разнообразных научно-педагогических проблем.

Задача исследователя состоит в том, чтобы не формально применять весь набор известных методов, а для каждого этапа определять свой оптимальный комплекс методов.

Целью психолого-педагогических исследований является анализ изменений, происходящих в процессе обучения, оценка значимости и направленности этих изменений и выявление основных факторов, влияющих на процесс.

Основные **этапы исследования:**

1. **Общая характеристика основных понятий предмета исследования:** объекта, предмета, цели и задач исследования. На этом этапе используются **методы теоретического поиска**, которые исследователь избирает с учетом особенностей исследования и своих возможностей.

2. **Анализ типичного состояния практики** решения подобных задач. Исследователь выбирает возможный арсенал методов анализа реального педагогического процесса (наблюдение, беседы).

3. **Конкретизация гипотезы исследования.** На данном этапе должны применяться методы экспериментального поиска решений проблемы.

4. **Проверка достоверности гипотез**, и здесь уже необходимо ввести в действие количественные методы эксперимента и опытной проверки.

5. **Обобщение результатов исследования** и формулирование рекомендаций по совершенствованию определенной стороны педагогического процесса.

Методы психолого-педагогического исследования:

1. ***Статистическое наблюдение*** – это планомерный, организованный сбор необходимых данных о явлениях и процессах путем регистрации характеризующих признаков, характерных для исследуемых явлений и процессов. *План наблюдения* отвечает на вопросы: что наблюдать, для чего наблюдать, когда и сколько времени наблюдать и что можно ожидать в результате проведенных наблюдений? Различают следующие виды статистического наблюдения: непрерывное; периодическое; единовременное; сплошное; несплошное.

2. Метод беседы и интервью.

3. Тест (анг. - проба, испытание, исследование) представляет собой совокупность вопросов и заданий, предъявляемых испытуемому с целью измерения (диагностирования) его личностных характеристик. Оценка теста производится по числу правильных ответов. Тестовая методика позволяет получать более объективные и точные данные по сравнению с анкетным опросом, облегчает математическую обработку результатов. Однако тестирование уступает другим методикам по глубине качественного анализа, лишает испытуемых разнообразия возможностей самовыражения.

4. Анкетирование - это метод получения информации с помощью специального набора вопросов, на которые испытуемый дает письменные ответы.

5. Метод рейтинга - это метод оценки тех или иных сторон деятельности компетентными судьями.

6. Метод обобщения независимых характеристик. Его суть сводится к обработке исследователем информации об ученике, поступившей из различных источников — от учителя, родителей, сверстников.

7. Метод педагогического эксперимента – это метод исследования, который используется с целью выяснения эффективности применения отдельных методов и средств обучения и воспитания. В отличие от обычного изучения педагогических явлений в естественных условиях путем их непосредственного наблюдения эксперимент позволяет целенаправленно изменять условия педагогического воздействия на испытуемых.

От каждого педагогического эксперимента необходимо требовать:

1. точного установления цели и задач эксперимента
2. точного описания условий эксперимента
3. определения в связи с целью исследования контингента учащихся
4. точного описания гипотезы исследования.

В педагогике различают естественный и лабораторный эксперименты. **Естественный эксперимент** проводится в обычных, естественных условиях обучения и воспитания (школе, классе). В случае **лабораторного эксперимента** в классе выделяется группа учеников. Исследователь проводит с ними особые беседы, индивидуальное и групповое обучение и наблюдает за их эффективностью.

Модель наиболее типичного педагогического эксперимента строится на сравнении экспериментальной и контрольной групп. Результат эксперимента проявляется в изменении, которое произошло в экспериментальной группе по сравнению с группой контрольной. Если исследователь не располагает двумя группами — экспериментальной и контрольной, он может сопоставлять данные эксперимента с данными, полученными до эксперимента, при работе в обычных условиях. Важно, чтобы экспериментальная и контрольная группы были сравнимы по основным показателям равенства начальных условий, существенным с точки зрения исследования.

П. 4. Проверка статистических гипотез

Поскольку статистика как метод исследования имеет дело с данными, в которых интересующие исследователя закономерности искажены различными случайными факторами, большинство статистических вычислений сопровождается проверкой некоторых предположений или гипотез об источнике этих данных.

Статистическая гипотеза *– это предположение о свойствах случайных величин или событий, которое мы хотим проверить по имеющимся данным.*

Нулевая гипотеза *– это основное проверяемое предположение, которое обычно формулируется как отсутствие различий, отсутствие влияние фактора, отсутствие эффекта.* Она обозначается как H_0.

Другое проверяемое предположение называется ***конкурирующей*** *или* ***альтернативной*** *гипотезой.* ***Альтернативная гипотеза*** – это гипотеза о значимости различий. Она обозначается как H_1.

Пусть x_1 и x_2 – сопоставляемые значения признаков, тогда направленные гипотезы могут быть сформулированы следующим образом:

H_0: x_1 не превышает x_2.

H_1: x_1 превышает x_2.

Ненаправленные гипотезы могут выглядеть так:

H_0: x_1 не отличается от x_2.

H_1: x_1 отличается от x_2.

Если в одной из групп показатели по какому-либо признаку выше, чем в другой или мы хотим доказать, что в одной группе под действием каких-либо экспериментальных воздействий произошли более выраженные изменения, чем во второй, то необходимо сформулировать направленные гипотезы. Если же нам достаточно доказать, что различаются распределения, то формулируются ненаправленные гипотезы.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость проверить ее. Так как проверку производят статистическими методами, то данная проверка называется статистической.

При проверке статистических гипотез возможны ошибки *(ошибочные суждения) двух видов:*

— можно отвергнуть нулевую гипотезу, когда она на самом деле верна (так называемая ***ошибка первого рода);***

— можно принять нулевую гипотезу, когда она на самом деле не верна (так называемая ***ошибка второго рода).***

Допустимая вероятность ошибки первого рода *(Ркр) может быть равна 5% или 1% (0.05 или 0.01).*

Уровень значимости – это вероятность ошибки первого рода при принятии решения (вероятность того, что мы сочли различия существенными, а на самом деле они случайны , то есть вероятность того, что мы отклонили нулевую гипотезу, в то время как она верна).

Альтернативные гипотезы принимаются тогда и только тогда, когда опровергается нулевая гипотеза. Это бывает в случаях, когда различия, скажем, в средних арифметических экспериментальной и контрольной групп настолько значимы (статистически достоверны), что риск ошибки отвергнуть нулевую гипотезу и принять альтернативную не превышает одного из трех принятых ***уровней значимости*** **статистического вывода**:

- **первый уровень — 5% (p=5%);** где допускается риск ошибки в выводе в пяти случаях из ста теоретически возможных таких же экспериментов при строго случайном отборе испытуемых для каждого эксперимента; Когда мы указываем, что различия достоверны на 5 %-ом уровне значимости, или при $p \leq 0,05$, то имеем в виду, что вероятность того, что они все-таки недостоверны, составляет 0,05.
- **второй уровень — 1%,** т. е. соответственно допускается риск ошибиться только в одном случае из ста; Когда мы указываем, что различия достоверны на 1 %-ом уровне значимости, или при $p \leq 0,01$, то имеем в виду, что вероятность того, что они все-таки недостоверны, составляет 0,01.
- **третий уровень — 0,1%,** т. е. допускается риск ошибиться только в одном случае из тысячи.

Принято низшим уровнем значимости считать 5 %-ый уровень ($p \leq 0,05$); достаточным – 1 %-ый ($p \leq 0,01$); высшим – 0,1 %-ый ($p \leq 0,001$). В основном в таблицах критических значений приводятся значения, соответствующие уровням статистической значимости $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$.

Проверка гипотез осуществляется с помощью статистических критериев.

Статистический критерий – это решающее правило, обеспечивающее принятие истинной и отклонение ложной гипотезы. Обычно в результате математической обработки экспериментальных данных исследователь получает некоторое число, которое сравнивается с критическими значениями, приводимыми в соответствующих таблицах. На основе данного анализа делается вывод о принятии и отклонении гипотез. К сожалению, статистические методы не могут дать абсолютной уверенности в правильности гипотезы, и это приводит нас к следующему понятию.

Статистика критерия *(Т) — некоторая функция от исходных данных, по значению которой проверяется нулевая гипотеза.*

Всякое правило, на основе которого отклоняется или принимается нулевая гипотеза называется ***критерием*** *для проверки данной гипотезы.* Статистический критерий (**критерий**) – это случайная величина, которая служит для проверки статистических гипотез.

Критическая область – совокупность значений критерия, при котором нулевую гипотезу отвергают. **Область принятия нулевой гипотезы** *(область допустимых значений)* – совокупность значений критерия, при котором нулевую гипотезу принимают.

Число степеней свободы у какого-либо параметра определяют как число опытов, по которым рассчитан данный параметр, минус количество одинаковых значений, найденных по этим опытам независимо друг от друга.

От **простого предположения гипотеза отличается рядом признаков**. К ним относят:

- соответствие фактам, на основе которых и для обоснования которых она создана;
- проверяемость;
- приложимость к возможно более широкому кругу явлений;
- относительная простота.

П. 5. Анализ данных

Этапы анализа данных:

1. **Сбор первичных данных для анализа.** Наблюдение и измерение характеристик объекта. Выдвижение статистической гипотезы на основании темы и цели исследования.

2. **Ввод данных в компьютер.**

3. **Преобразование данных.** Проводится группировка данных, то есть распределение их на однородные группы в соответствии с интересующими исследователя признаками. Данные в каждой группе упорядочиваются - классифицируются, сортируются, структурируются, подсчитывается частота событий. Нередко также требуется удаление из введенных данных высокоамплитудных значений, которые могут быть результатом некорректных измерений или замена пропущенных (неизмеренных) значений.

4. **Визуализация данных** – представление данных в табличной или графической форме.

Виды графиков:

- **Линейный график** – передает изменения в некоторых мерных числах, например, изменение средних оценок контрольных работ, проведенных в одном классе в течение учебного года.
- **Гистограмма** представляет собой разновидность графика в котором по оси “Y” откладываются частотные (интервальные) значения какой-либо группировки, в результате чего график становится “ступенчатым”.
- **Полигон частот** – на базе полигона частот строится гистограмма, разница между ними заключается в том, что в полигоне частота интервала сведена к его центру, а при гистограмме частоты изображают равномерно в пределах всего интервала.
- **Кумулятивный график частоты (накопляющее распределение частоты)** – частота отдельных интервалов совокупности рассматривается кумулятивно, то есть к частоте каждого интервала прибавляются частоты всех предыдущих интервалов.
- **Диаграммы** сопоставляют количественную информацию в виде площадей различных фигур (круг, прямоугольник, сектор, цилиндр, пузырьки и др.).

5. **Статистический анализ -** статистическая обработка полученных количественных данных, заключающаяся в вычислении некоторых статистических характеристик и оценок, позволяющих проверить нулевую гипотезу.

6. **Интерпретация и представление результатов.** *Основная цель интерпретации* — выявление и фиксирование комплекса характеристик обработанного материала, на основе которых открывается возможность обнаружить и объяснить основные тенденции и сформулировать выводы.

Шкала – это средство фиксации результатов измерения свойств объектов путем упорядочивания их в определенную числовую систему, в которой отношение между отдельными результатами выражено в соответствующих числах. В процессе упорядочивания каждому элементу выборки ставится в соответствие определенный балл (шкальный индекс), устанавливающий положение наблюдаемого результата на шкале.

Шкалирование — это операция упорядочивания исходных эмпирических данных путем перевода их в шкальные оценки.

В психолого-педагогических исследованиях применяют классификацию шкал, предложенную С.Стивенсоном, согласно которой четыре основных способа измерения, связанные с различными правилами, называют **измерительными шкалами** (номинальная, порядковая, интервальная и шкала отношений).

➢ **Номинальная шкала** делит все объекты на группы по какому-либо признаку (различию). Этим признакам присваиваются определенные числа (код), что создает удобства при дальнейшей обработке экспериментальных данных. Никакого количественного соотношения между объектами в номинальной шкале нет.

➢ **Шкала порядка** предназначена для измерения (обозначения) степени различия какого-либо признака или свойства у разных объектов.

➢ **Интервальная шкала** это такое присвоение чисел объектам, когда определено расстояние между объектами и предусмотрена общая для всех объектов постоянная единица измерения. В интервальной шкале вводится единица и масштаб измерения.

➢ **Шкала отношений** отличается от интервальной только тем, что ее нулевая точка не произвольна, а указывает на полное отсутствие измеряемого свойства.

Шкала	**Математические и статистические величины, вычисление которых допустимо на данном уровне**
Номинальная	Мода, процентные частоты, доли, корреляция
Порядковая	Мода, медиана, квартили, коэффициент корреляции, дисперсионный анализ
Интервальная	Мода, медиана, квартили, коэффициент корреляции, ранговые критерии, средняя, дисперсия, стандартное отклонение, коэффициент корреляции
отношений	Все арифметические операции, все понятия и методы математической статистики

Ранжирование числового ряда

Изучим правила ранжирования.

1. Меньшему значению начисляется меньший ранг. Наименьшему значению присваивается ранг равный 1; наибольшему значению начисляется ранг, равный количеству ранжируемых значений, за исключением случаев предусмотренных правилом 2.

Пример. Даны числа 2, 15, 7, 19, 11. Ранги данных чисел приведены в *таблице:*

Ранжирование числового ряда

x_i	2	15	7	19	11
R_i	1	4	2	5	3

2. В случае, если несколько значений равны, им начисляется ранг, представляющий собой математическое ожидание тех рангов, которые они получили бы, если бы не были равны.

Пример. Ранжируем числа 5, 5, 5, 3, 14. Тройке присваивается ранг, равный 1. Если бы вместо пятерок были различные числа, то им были бы начислены следующие ранги: 2, 3, 4. Но так как числа одинаковы, каждому из них присваивается ранг $\frac{2+3+4}{3} = 3$:

Ранжирование числового ряда

x_i	5	5	5	3	14
R_i	3	3	3	1	5

3. Общая сумма рангов должна совпадать с расчетной, которая определяется по формуле: $\sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{n(n+1)}{2}$, где n – общее количество ранжируемых значений. Несовпадение реальной и расчетной сумм свидетельствует о наличии ошибки, которую необходимо устранить.

Пример. В примере, иллюстрирующем правило 2, общая сумма рангов равна:

3 + 3 + 3 + 1 + 5 = 15, а расчетная $\sum_{i=1}^{5} R_i = \frac{5(5+1)}{2}$ (так как n = 5). Суммы совпадают.

Пример. Проранжировать значения 0, 12, 4, 5, 12, 4, 17, 4

Ранжирование числового ряда

x_i	0	12	4	5	12	4	17	4
R_i	1	6,5	3	5	6,5	3	8	3

Общая сумма рангов равна 1 + 6,5 + 3 + 5 + 6,5 + 3 + 8 + 3 = 36, расчетная –
$$\sum_{i=1}^{8} R_i = \frac{8(8+1)}{2} = 36 .$$

П. 6. Анализ двух выборок

Важнейшим вопросом, возникающем при анализе двух выборок, является вопрос о наличии различий между выборками. Обычно для этого проводят проверку статистических гипотез о принадлежности обеих выборок одной генеральной совокупности или о равенстве средних.

Критерии различий

Критерии различий используются для выявления различий между двумя – тремя и большим количеством групп (выборок) испытуемых. Предполагается, что сопоставляются так называемые независимые выборки, состоящие из разных испытуемых. Тот, кто входит в одну группу, уже не может входить в другую.

U-критерий Манна-Уитни

Критерий предназначен для оценки различий между двумя группами по уровню какого-либо признака. Он позволяет проверить гипотезы, сформулированные примерно так:

H_0: Уровень признака в группе 2 не ниже уровня признака в группе 1.

H_1: Уровень признака в группе 2 ниже уровня признака в группе 1.

Заметим, что чем больше в группах «перекрещивающихся» (совпадающих) значений, тем более вероятно, что различия случайны.

Отметим несколько ограничений критерия Манна-Уитни:

- допускается, чтобы в одной выборке было 2 наблюдения, но тогда во второй их должно быть не менее 5;
- критерий можно использовать тогда, когда в каждой группе не менее трех наблюдений;
- в каждой группе должно быть не более 60 наблюдений.

Алгоритм расчета *U*-критерия Манна-Уитни.

1. Перенести все данные испытуемых на индивидуальные карточки.
2. Пометить карточки группы 1 каким-либо цветом, например, красным, группы 2 – другим, например, зеленым.
3. Разложить все карточки в единый ряд по степени нарастания признака, не считаясь с тем, к какой группе они относятся.
4. Проранжировать значения на карточках. Всего рангов получится $n_1 + n_2$, где n_1 – количество человек в первой группе, n_2 – во второй.
5. Вновь разложить карточки на две группы, ориентируясь на цветные обозначения (красные – к красным, зеленые – к зеленым).
6. Подсчитать сумму рангов отдельно по каждой группе. Проверить, совпадает ли общая сумма рангов с расчетной.
7. Определить большую из двух ранговых сумм T_x. Сформулировать гипотезы.

8. Определить значение $U_{эмп}$ по формуле: $U_{эмп} = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_x(n_x+1)}{2} - T_x$, где n_1 – количество человек в первой группе; n_2 – во второй; T_x – большая из двух ранговых сумм; n_x – количество человек в группе с большей ранговой суммой.
9. Определить критические значения по таблице I Приложения 1.
10. Если $U_{эмп} \geq U_{0,05}$, то принимается гипотеза H_0. Если $U_{0,01} < U_{эмп} \leq U_{0,05}$, то принимается гипотеза H_1 на низком уровне значимости, то есть $p_{\leq}$ 0,05. Если $U_{эмп} \leq U_{0,01}$, то принимается гипотеза H_1 на достаточном уровне значимости, то есть $p_{\leq}$ 0,01.

Пример. С помощью тестов исследовали уровень невербального интеллекта студентов физического и психологического факультетов, полученные данные приведены в *таблице:*

Показатели вербального интеллекта

Студенты-физики		**Студенты-психологи**	
Код имени	**Показатель вербального интеллекта**	**Код имени**	**Показатель вербального интеллекта**
1. К. М.	106	1. О. М.	108
2. П. О.	107	2. Р. А	111
3. Н. И.	99	3. Н. А.	112
4. И. Ю.	102	4. Ю. И.	113
5. Г. О.	104	5. А. О.	114
6. Ш. Л.	107	6. Ш. В.	117
7. П. Л.	115	7. Е. У.	122
8. А. Г.	111	8. Б. Я.	123
9. Н. О.	127	9. Ж. А.	104
10. В. О.	116	10. Т. О.	105
11. Р. А.	115	11. В. А.	102
12. Т. О.	107	12. Т. И.	107
13. О. А.	90		
14. С. Д.	95		

Можно ли утверждать, что одна из групп превосходит другую по уровню вербального интеллекта?

Для ответа на этот вопрос используем критерий Манна-Уитни, все ограничения выполняются, следовательно, можем использовать описанный выше алгоритм. После выполнения первых шести шагов получим следующую таблицу:

Ранжирование индивидуальных показателей

Студенты-физики		**Студенты-психологи**	
Показатель вербального интеллекта	**Ранг**	**Показатель вербального интеллекта**	**Ранг**
90	1		
95	2		
99	3		
102	4,5	102	4,5
104	6,5	104	6,5
		105	8
106	9		
107	11,5	107	11,5
107	11,5		
107	11,5		
		108	14

111	15,5	111	15,5
		112	17
		113	18
		114	19
115	20,5		
115	20,5		
116	22		
		117	23
		122	24
		123	25
127	26		
Сумма рангов	**165**		**186**

Заметим, что $n = 14 + 12 = 26$.

Общая сумма рангов: 165 + 186 = 351. Расчетная сумма: $\sum_{i=1}^{26} R_i = \frac{26(26+1)}{2} = 351$. Равенство общей и расчетной сумм выполняется.

Видно, что уровень вербального интеллекта в группе студентов-психологов и большая из двух ранговых сумм – $T_x = 186$.

Сформулируем гипотезы:

H_0: Уровень вербального интеллекта в группе студентов-физиков не ниже уровня вербального интеллекта в группе студентов-психологов.

H_1: Уровень вербального интеллекта в группе студентов-физиков ниже уровня вербального интеллекта в группе студентов-психологов.

Таким образом $n_1 = 14$, $n_2 = 12$; $T_x = 186$; $n_x = 12$;. С помощью формулы, приведенной в 8-м шаге, вычислим $U_{эмп} = 14 \cdot 12 + \frac{12(12+1)}{2} - 186 = 60$.

По таблице I Приложения 1 находим критические значения, причем за n_1 принимаем меньшее из n_1 и n_2, тогда .

$$U_{кр} = \begin{cases} 51\ (p \le 0.05) \\ 38\ (p \le 0.01) \end{cases}.$$

Так как $U_{эмп} \ge U_{0,05}$, то принимается гипотеза H_0: уровень вербального интеллекта в группе студентов-физиков не ниже уровня вербального интеллекта в группе студентов-психологов.

Критерии изменений

Теперь рассмотрим примеры критериев изменений. Эти критерии необходимы, когда требуется доказать, что в результате действия каких-либо факторов произошли достоверные изменения (сдвиги) в исследуемых показателях. Сдвиги бывают временные, ситуационные, умозрительные, сдвиги под влиянием и т. д. Для нас важными является деление сдвигов на типичные (преобладающие) и нетипичные.

T-критерий Вилкоксона

Данный критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях в одной и той же группе испытуемых. Он позволяет установить не только направление, но и выраженность изменений (сдвигов).

T-критерий позволяет проверить гипотезы, сформулированные примерно так:

H_0: Интенсивность сдвигов в типичном направлении не превосходит интенсивности сдвигов в нетипичном направлении.

H_1: Интенсивность сдвигов в типичном направлении превосходит интенсивность сдвигов в нетипичном направлении.

Ограничения *T*-критерия:

- минимальное количество испытуемых, прошедших измерения в двух условиях – 5 человек, максимальное – 50;
- нулевые сдвиги из рассмотрения исключаются и количество наблюдений *n* уменьшается на количество нулевых сдвигов.

Алгоритм расчета *T*-критерия Вилкоксона:

1. Составить список испытуемых в любом порядке.
2. Вычислить разность между индивидуальными значениями во втором и первом замерах («после» – «до»). Определить, что будет считаться типичным сдвигом, сформулировать соответствующие гипотезы.
3. Перевести разности в абсолютные величины и записать отдельным столбцом.
4. Проранжировать абсолютные величины разностей, исключив нулевые сдвиги. Проверить совпадение полученной суммы рангов с расчетной. Отметить ранги, соответствующие сдвигам в нетипичном направлении.
5. Сложить выделенные ранги и обозначить полученное число как $T_{эмп}$.
6. Определить критические значения *T* для данного *n* по таблице II Приложения 1. Если $T_{эмп} \geq T_{0,05}$, то принимается гипотеза H_0. Если $T_{0,01} < T_{эмп} \leq T_{0,05}$, то принимается гипотеза H_1 на низком уровне значимости, то есть $p \leq 0,05$. Если $T_{эмп} \leq T_{0,01}$, то принимается гипотеза H_1 на достаточном уровне значимости, то есть $p \leq 0,01$.

Пример. В группе курсантов военного училища измерялась способность к удержанию физического волевого усилия на динамометре. Курсантам предлагалось удерживать на динамометре мышечное усилие, равное половине максимальной мышечной силы, которая была измерена у них ранее. На следующий день курсантам предложили повторить эксперимент, представив себе, что каждый из них достиг своего идеала в развитии своих волевых качеств. Данные эксперимента представлены в таблице ниже. Подтвердилась ли гипотеза о том, что обращение к идеалу способствует возрастанию волевого усилия?

Длительность удержания мышечного усилия

Код имени	**Длительность удержания усилия**	
	До обращения к идеалу	**После обращения к идеалу**
1. А.	82	82
2. В.	64	25
3. К.	77	50
4. Коп.	74	77
5. П.	95	76
6. Р.	105	67
7. Т.	83	75
8. С.	73	77
9. У.	75	71
10. Ф.	101	63
11. Ю.	97	122
12. Я.	78	60

После выполнения первых пяти шагов алгоритма мы получим следующую таблицу.

Ранжирование длительности удержания мышечного усилия

Код имени	**Длительность удержания усилия**		**Разность «после» – «до»**	**Абсолютное значение разности**	**Ранг**
	До обращения к идеалу	**После обращения к идеалу**			
1. А.	82	82	0	0	–
2. В.	64	25	–39	39	11
3. К.	77	50	–27	27	8
4. Коп.	74	77	+3	3	1
5. П.	95	76	–19	19	6
6. Р.	105	67	–38	38	9,5
7. Т.	83	75	–8	8	4
8. С.	73	77	+4	4	2,5
9. У.	75	71	–4	4	2,5
10. Ф.	101	63	–38	38	9,5
11. Ю.	97	122	+25	25	7
12. Я.	78	60	–18	18	5
Сумма					**66**

После исключения нулевых сдвигов n = 11. Расчетная сумма рангов равна
$\sum_{i=1}^{11} R_i = \frac{11(11+1)}{2} = 66$. Совпадение общей и расчетной ранговых сумм выполняется.

Гипотезы:

H_0: Интенсивность сдвигов в сторону уменьшения длительности мышечного усилия не превосходит интенсивности сдвигов в сторону ее увеличения.

H_1: Интенсивность сдвигов в сторону уменьшения длительности мышечного усилия превосходит интенсивность сдвигов в сторону ее увеличения.

Тэмп = 1 + 2,5 + 7 = 10,5

Найдем критические значения по таблице II Приложения 1:

$$T_{кр} = \begin{cases} 13\ (p \le 0.05) \\ 7\ (p \le 0.01) \end{cases}$$

Так как $T_{0,01} < T_{эмп} \le T_{0,05}$, то принимается гипотеза H_1 на низком уровне значимости.

В группу **<u>параметрических критериев</u>** методов математической статистики входят методы для вычисления описательных статистик, построения графиков на нормальность распределения, проверка гипотез о принадлежности двух выборок одной совокупности. Эти методы основываются на предположении о том, что распределение выборок подчиняется нормальному закону распределения.

Чтобы **определить, имеем ли мы дело с нормальным распределением**, можно применить следующий метод: вычисляется среднее, медиана и мода и на основе этого определяется отклонение от нормального распределения. Если мода, медиана и среднее арифметическое друг от друга значительно не отличаются, мы имеем дело с нормальным распределением. Если медиана значительно отличается от среднего, то мы имеем дело с асимметричной выборкой.

Критерий Стьюдента (t-критерий) Критерий позволяет найти вероятность того, что оба средних значения в выборке относятся к одной и той же совокупности. Данный критерий наиболее часто используется для проверки гипотезы: «Средние двух выборок относятся к одной и той же совокупности».

При использовании критерия можно выделить два случая. В первом случае его применяют для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних двух **независимых, несвязанных** выборок (так называемый **двухвыборочный t-критерий**). В этом случае есть контрольная группа и экспериментальная (опытная) группа, количество испытуемых в группах может быть различно.

Во втором случае, когда одна и та же группа объектов порождает числовой материал для проверки гипотез о средних, используется так называемый **парный t-критерий**. Выборки при этом называют **зависимыми, связанными**.

а) случай независимых выборок

Статистика критерия для случая несвязанных, независимых выборок равна:

$$t_{эмп} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{x-y}},$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — средние арифметические в экспериментальной и контрольной группах, σ_{x-y} - стандартная ошибка разности средних арифметических, которая находится из формулы:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)},$$

где n_1 и n_2 соответственно величины первой и второй выборки.

Если $n_1=n_2$, то стандартная ошибка разности средних арифметических будет считаться по формуле:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{(n-1)\cdot n}},$$

где n величина выборки.

Подсчет **числа степеней свободы** осуществляется по формуле: $k = n_1 + n_2 - 2$.

При численном равенстве выборок $k = 2n - 2$.

Далее необходимо сравнить полученное значение $t_{эмп}$ с теоретическим значением t— распределения Стьюдента (см. приложение к учебникам статистики). Если $t_{эмп}<t_{крит}$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза.

б) случай связанных (парных) выборок

В случае связанных выборок с равным числом измерений в каждой можно использовать более простую формулу t-критерия Стьюдента.

Вычисление значения t осуществляется по формуле:

$$t_{эмп} = \frac{\bar{d}}{Sd},$$

где $d_i = x_i - y_i$ — разности между соответствующими значениями переменной X и переменной У, а d - среднее этих разностей.

Sd вычисляется по следующей формуле:

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n \cdot (n-1)}}.$$

Число степеней свободы *k* определяется по формуле k=n-1.

Если $t_{эмп}<t_{крит}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае принимается альтернативная.

Критерий Фишера позволяет сравнивать величины выборочных дисперсий двух независимых выборок. Для вычисления $F_{эмп}$ нужно найти отношение дисперсий двух выборок, причем так, чтобы большая по величине дисперсия находилась бы в числителе, а меньшая – в знаменателе. Формула вычисления критерия Фишера такова:

$$F_{эмп} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2},$$

где σ_x^2, $\sigma^2 y$ - дисперсии первой и второй выборки соответственно.

Так как, согласно условию критерия, величина числителя должна быть больше или равна величине знаменателя, то значение $F_{эмп}$ всегда будет больше или равно единице.

Число степеней свободы определяется по формуле: $k_1=n_l - 1$ для первой выборки (т.е. для той выборки, величина дисперсии которой больше) и $k_2=n_2 - 1$ для второй выборки.

Если $t_{эмп}>t_{крит}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае принимается альтернативная.

Непараметрические критерии

Критерий χ^2 (хи-квадрат) применяется для сравнения распределений объектов двух совокупностей на основе измерений по шкале наименований в двух **независимых** выборках.

Применяется нулевая гипотеза, что выборки принадлежат к одной совокупности. Определяется ожидаемое значение результата. Обычно это среднее значение между выборками рассматриваемого показателя. Затем оценивается вероятность того, что ожидаемые значения и наблюдаемые принадлежат к одной генеральной совокупности.

П. 7. Аналитическая статистика

1. **Дисперсионный анализ** применяется для исследования влияния одной или нескольких качественных переменных *(факторов)* на одну зависимую количественную переменную *(отклик).*

Дисперсионный анализ, предложенный Р. Фишером, является статистическим методом, предназначенным для выявления влияния ряда отдельных факторов на результаты экспериментов.

В основе дисперсионного анализа лежит предположение о том, что одни переменные могут рассматриваться как причины (факторы, независимые переменные), а другие как следствия (зависимые переменные).

Исходным материалом для дисперсионного анализа служат данные исследования трех и более выборок, которые могут быть как **равными**, так и **неравными** по численности, как **связными**, так и **несвязными**. По количеству выявляемых регулируемых факторов дисперсионный анализ может быть **однофакторным** (при этом изучается влияние одного фактора на результаты эксперимента), **двухфакторным** (при изучении влияния двух факторов) и **многофакторным** (позволяет оценить не только влияние каждого из факторов в отдельности, но и их взаимодействие)**.**

- **Однофакторный дисперсионный анализ для несвязанных выборок**. Изучается действие только одной переменной (фактора) на исследуемый признак. Исследователя интересует вопрос, как изменяется определенный признак в разных условиях действия переменной (фактора). Градаций фактора должно быть не менее трех.
- **Дисперсионный анализ для связанных выборок** применяется в тех случаях, когда исследуется влияние разных градаций фактора или разных условий на одну и ту же выборку испытуемых. Градаций фактора должно быть не менее трех.

2. **Корреляционный анализ** – это группа статистических методов, направленная на выявление и математическое представление структурных зависимостей между выборками.

Корреляционная связь — это согласованное изменение двух признаков, отражающее тот факт, что изменчивость одного признака находится в соответствии с изменчивостью другого.

Известно, например, что в среднем между ростом людей и их весом наблюдается положительная связь, и такая, что чем больше рост, тем больше вес человека.

Корреляционная зависимость - это изменения, которые вносят значения одного признака в вероятность появления разных значений другого признака

Задача корреляционного анализа сводится к установлению направления (положительное или отрицательное) и формы (линейная, нелинейная) связи между варьирующими признаками, измерению ее тесноты, и, наконец, к проверке уровня значимости полученных коэффициентов корреляции.

Корреляционные связи различаются **по форме, направлению и степени (силе).**

По форме корреляционная связь может быть *прямолинейной* или *криволинейной. Прямолинейной* может быть, например, связь между количеством тренировок на тренажере и количеством правильно решаемых задач в контрольной сессии. *Криволинейной* может быть, например, связь между уровнем мотивации и эффективностью выполнения задачи: при повышении мотивации эффективность выполнения задачи сначала возрастает, затем достигается оптимальный уровень мотивации, которому соответствует максимальная эффективность выполнения задачи; дальнейшему повышению мотивации сопутствует уже снижение эффективности.

По направлению корреляционная связь может быть *положительной* ("прямой") и *отрицательной* ("обратной"). При *положительной* прямолинейной корреляции более высоким значениям одного признака соответствуют более высокие значения другого, а более низким значениям одного признака - низкие значения другого. При *отрицательной* корреляции соотношения обратные.

Степень, сила или теснота корреляционной связи определяется по величине коэффициента корреляции.

Общая классификация корреляционных связей (по Ивантер Э.В., Коросову А.В., 1992):

- **сильная**, или **тесная** при коэффициенте корреляции $r>0,70$;
- **средняя** при $0,50<r<0,69$;
- **умеренная** при $0,30<r<0,49$;
- **слабая** при $0,20<r<0,29$;
- **очень слабая** при $r<0,19$.

Коэффициент корреляции Пирсона характеризует наличие только линейной связи между признаками, обозначаемыми, как правило, символами X и Y. Формула расчета коэффициента корреляции построена таким образом, что, если связь между признаками имеет линейный характер, коэффициент Пирсона точно устанавливает тесноту этой связи. Поэтому он называется также коэффициентом линейной корреляции Пирсона. Если же связь между переменными X и Y не линейна, то Пирсон предложил для оценки тесноты этой связи так называемое корреляционное отношение. Числа +1 и -1 — являются границами для коэффициента корреляции. Когда при расчете получается величина большая +1 или меньшая -1 — следовательно, произошла ошибка в вычислениях.

Если знак коэффициента линейной корреляции — плюс, то связь между коррелирующими признаками такова, что большей величине одного признака (переменной) соответствует большая величина другого признака (другой переменной). Если же получен знак минус, то большей величине одного признака соответствует меньшая величина другого.

В общем виде формула для подсчета коэффициента корреляции такова:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}},$$

где x_i — значения, принимаемые в выборке X; y_i — значения, принимаемые в выборке Y; $\bar{x}$ — средняя по X, $\bar{y}$ — средняя по Y.

Для вычисления коэффициента корреляции в Excel предусмотрена функция КОРРЕЛ.

3. Регрессионные процедуры позволяют рассчитать *модель,* описываемую некоторым уравнением и отражающую функциональную зависимость между экспериментальными количественными переменными, а также проверяют гипотезу об адекватности модели экспериментальным данным. По полученным результатам можно оценить природу и степень зависимости переменных и предсказать новые значения зависимой переменной.

Регрессионный анализ - это группа методов, направленных на выявление и математическое выражение тех изменений и зависимостей, которые имеют место в системе случайных величин.

Формальными задачами регрессионного анализа являются:

- **выявить факт изменчивости** изучаемого явления при определенных, но не всегда четко фиксированных условиях.
- **выявить тенденцию** как периодическое изменение признака – выявление тенденции и ее особенностей
- **выявление закономерности, выраженной в виде корреляционного уравнения (регрессии)**.

Для получения коэффициентов регрессии используется процедура Регрессия из пакета анализа. Также могут быть использованы функции: ЛИНЕЙН – для получения параметров регрессионного уравнения и ТЕНДЕНЦИЯ – для получения предсказанных значений У в требуемых точках.

4. Основной задачей **факторного анализа** является нахождение в многомерном пространстве первичных переменных (значения которых регистрируются в эксперименте), сокращенной системы вторичных переменных (*факторов)*. Метод факторного анализа первоначально был разработан в психологии с целью выделения отдельных компонентов человеческого интеллекта из многомерных данных по измерению различных проявлений умственных способностей.

Приложение 1.

Таблица I. Критические значения критерия U Манна-Уитни*

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_2	$p_{\leq}$ 0,05																		
2	-	0																	
4	-	0	1																
5	0	1	2	4															
6	0	2	3	5	7														
7	0	2	4	6	8	11													
8	1	3	5	8	10	13	15												
9	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
	$p_{\leq}$ 0,01																		
5	-	-	0	1															
6	-	-	1	2	3														
7	-	0	1	3	4	6													
8	-	0	2	4	6	7	9												
9	-	1	3	5	7	9	11	14											
10	-	1	3	6	8	11	13	16	19										
11	-	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
12	-	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39							
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47						
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56					
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77			
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88		
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

* Более полные таблицы можно найти в литературе по математической статистике. Приведенные таблицы симметричны, поэтому при необходимости можно их заполнить до конца самостоятельно.

Таблица II**. **Критические значения критерия Т Вилкоксона

n	p		n	p	
	$p \leq 0,05$	$p \leq 0,01$		$p \leq 0,05$	$p \leq 0,01$
5	0	–	15	30	19
6	2	–	16	35	23
7	3	0	17	41	27
8	5	1	18	47	32
9	8	3	19	53	37
10	10	5	20	60	43
11	13	7	21	67	49
12	17	9	22	75	55
13	21	12	23	83	62
14	25	15	24	91	69